

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
ADOLF HAIMOVICI

Etapă locală-9 februarie 2013

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

Barem clasa XI

1. Fie $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât $X+Y=XY$, pentru orice $X, Y \in \{A, B, C, D\}$. Să se arate că $2(A+B+C+D)=ABCD$.

Soluție: $XY=X+Y=Y+X=YX$ deci matricele A, B, C, D comută între ele.....2p

$A+B=AB$, $B+C=BC$, $C+D=CD$, $D+A=DA$1p

Prin adunare $2(A+B+C+D)=AB+BC+CD+DA$1p

$=AB+BC+DC+DA=B(A+C)+D(A+C)=(B+D)(A+C)$2p

$=(BD)(AC)=ABCD$1p

2. a) Fie a, b, c lungimile laturilor unui triunghi, iar h_a, h_b, h_c înălțimile

corespunzătoare. Să se calculeze valoarea determinantului $\begin{vmatrix} 1 & a & h_b h_c \\ 1 & b & h_c h_a \\ 1 & c & h_a h_b \end{vmatrix}$.

- b) Să se scrie sub formă de produs valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-a-c & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

Soluție:

- a) este cunoscută formula $S = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}$1p

$$\begin{vmatrix} 1 & a & h_b h_c \\ 1 & b & h_c h_a \\ 1 & c & h_a h_b \end{vmatrix} = bh_a h_b + ch_b h_c + ah_a h_c - bh_b h_c - ch_a h_c - ah_a h_b$$

$$= 2Sh_a + 2Sh_b + 2Sh_c - 2Sh_c - 2Sh_a - 2Sh_b = 0$$
.....1p

- b) folosind proprietățile determinantilor se obține $(a+b+c)^3$4p

3. Să se calculeze următoarele limite:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}$ unde $a, b > 0$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$

Soluție:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{a^x + b^x - 2}{2} \right)^{\frac{1}{x}}$1p

$$= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{a^x + b^x - 2}{2} \cdot \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{a^x - 1 + b^x - 1}{2} \cdot \frac{1}{x}}$$
.....1p

$$= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln a + \ln b}{2}} = \sqrt{ab}$$
.....1p

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{\cos x} - 1) - (\sqrt[3]{\cos x} - 1)}{\sin^2 x}$1p

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin^2 x (\sqrt{\cos x} + 1)} - \frac{\cos x - 1}{\sin^2 x (\sqrt[3]{\cos x} + \sqrt[3]{\cos x} + 1)}$$
.....1p

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{(1 - \cos^2 x)(\sqrt{\cos x} + 1)} - \frac{\cos x - 1}{(1 - \cos^2 x)(\sqrt[3]{\cos^2 x} + \sqrt[3]{\cos x} + 1)} \dots\dots\dots 1p$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{(1 + \cos x)(\sqrt{\cos x} + 1)} - \frac{-1}{(1 + \cos x)(\sqrt[3]{\cos^2 x} + \sqrt[3]{\cos x} + 1)} = \frac{-1}{4} + \frac{1}{6} = -\frac{1}{12} \dots\dots\dots 1p$$

4. Să se determine a,b,c numere reale astfel încât funcția $f : \mathbb{R} - \{-c\} \rightarrow \mathbb{R}$,
 $f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x + c}$ să aibă ca asimptote drepte de ecuații $x=1$ și $y=x+2$ iar
punctul $P(2,6)$ să fie un punct al graficului.

Soluție: din $x = 1$ asimptotă verticală se obține $c = -1$1p

Din $y=x+2$ asimptotă oblică $m=1, n=2$1p

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + ax + b}{x^2 - x} = 1 \dots\dots\dots 1p$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + ax + b}{x - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x(a+1) + b}{x - 1} \right) = a + 1 \dots\dots\dots 2p$$

deci $a=1$ și $b \in \mathbb{R}$1p

$$f(2)=6 \Rightarrow b = 0 \dots\dots\dots 1p$$